数理解析研究所講究録
984巻 1997年 138-146

ある非線形楕円型境界値問題の特異解の族について

大阪大学理学研究科
浜武　亜希子　　鈴木　貴
(Akiko Hamatake and Takashi Suzuki)
1996年　11月

1 Introduction

$D=\{x\in\mathcal{R}^2\ |\ |x|^2<1\}$ に対し、次の方程式の解の族 $\{(\lambda,u(x))\}$ について考察したい。

$$-\Delta u=2\lambda K(x)\,e^u \quad \text{in} \quad D \tag{1}$$

with

$$u=0 \quad \text{on} \quad \partial D \tag{2}$$

ここで λ : 正定数、$K(x)$ は与えられた実数値関数を表わす。方程式 (1) は、$p=\lambda e^u$ に対する曲面 $\left(D,p^{1/2}ds\right)$ $(ds^2=dx_1^2+dx_2^2)$ の Gauss 曲率が $K(x)$ であることを表わす (Bandle [1])。$K(x)\equiv 1$ のとき、(1)-(2) の解はexplicit に表示され、特に $0<\lambda<1$ のとき、解は２つ存在し大きい方の解は $\lambda\downarrow 0$ とすると、

$$u(x)\to 4\log\frac{1}{|x|} \quad \text{locally uniformly in} \quad \overline{D}\setminus\{0\} \tag{3}$$

という挙動をする。
Weston [10] と Moseley [4] は、与えられた単連結領域 $\Omega\subset\mathcal{R}^2$ において、次の方程式

$$-\Delta v=\lambda e^v \quad \text{in} \quad \Omega \tag{4}$$

with

$$v = 0 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{5}$$

の古典解の族 $\{(\lambda, v(x))\}$ で、$\lambda \downarrow 0$ としたとき、

$$v(x) \to 8\pi G(x, \kappa) \tag{6}$$

となるものを構成した。ここで、$G(x,y)$ はDirichlet問題における $-\Delta$ のGreen関数、$\kappa \in \Omega$はRobin関数

$$R(x) = \left[G(x,y) + \frac{1}{2\pi} \log|x-y| \right]_{y=x} \tag{7}$$

の臨界点を表わす。

これとは逆に、(4)-(5) における解の $\lambda \downarrow 0$ における漸近挙動を分類することはNagasaki-Suzuki [5] によって行われている。

Weston とMoseleyによる理論では、等角写像 $g : D \to \Omega$ を用いて 条件(6) を満たす方程式 (4)-(5) を、$K = 1/2|g'|^2$ に対する条件 (3) を満たす方程式 (1)-(2) に帰着する。これとSuzuki [7] の方法をまとめることにより、次の結果が得られる。

Proposition 1

$$p(0) \neq 0, \quad p'(0) = 0, \quad |p''(0)/p(0)| \neq 2 \tag{8}$$

を満たす D上正則、$\overline{D}$ 上連続な関数pにおいて、$K = |p|^2$ に対する条件 *(3)*を満たす方程式 *(1)-(2)* の古典解の族 $\{(\lambda, u(x))\}$ が存在する。

上述の等角写像によりProposition 1 を方程式(4)-(5) に適用すると、条件(8) の $p'(0) = 0$ は、$g(0) = \kappa \in \Omega$ がRobin関数 $R(x)$ の臨界点であることを示し、$|p''(0)/p(0)| \neq 2$ は、これが非退化であることを示す。すなわち $R(x)$ の非退化な臨界点 $\kappa \in \Omega$ に対し条件(6) を満たす方程式 (4)-(5) の古典解の族が存在する。

$K = |p|^2$ とは異なる一般の $K(x)$ についてはどうだろうか? このことを、方程式(1)のかわりに

$$-\Delta u = 2\lambda K(x)\, e^u \qquad \text{in} \quad D \setminus \{0\} \tag{9}$$

とおきかえて考察しよう。

$$Z_n \equiv \{\text{実係数n次2変数斎次多項式}\}$$
$$H_n \equiv \{h \in Z_n \mid \Delta h = 0\}$$

更に、

$$Z \equiv \bigoplus_{n \geq 0} Z_n \subset A(D) \equiv \{\text{D上実解析関数全体}\}$$

とおく。$v \in A(D)$ に対し、

$$\|v\| \equiv \sup_{n\geq 0} (n+1)^2 |v|_n \tag{10}$$

とノルムを与え $X \equiv \{v \in A(D) \mid \|v\| < +\infty\}$ とし、さらに

$$X_{00} \equiv \left[\bigoplus_{\substack{k\geq 2\\ l\geq 0}} |x|^{2k} H_l \right]^X$$

とする。ただし、

$$v(x) = \sum_{k,l\geq 0} a_{kl} x_1^k x_2^l \qquad \text{for} \qquad x = (x_1, x_2)$$

に対し

$$|v|_n \equiv \max_{k+l\leq n} |a_{kl}|$$

であり、$[\,\cdot\,]^X$ は X における閉包を表わす。

これらの準備のもとで得られた結果が次の定理である。

Theorem 2 *$K(x) \in X_{00}$ とすると、条件 (3) を満たすような方程式 (9)-(2) の古典解の族 $\{(\lambda, u(x))\}$ が存在する。*

(8) を満たす D上正則、$\overline{D}$上連続関数の集合を$\wp$ と記すと、

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \in \wp$$

に対し Proposition 1 の $K(x)$ は、

$$\begin{aligned} K = |p|^2 &= (p_0 + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \cdots)(\overline{p_0} + \overline{p_2 z^2} + \overline{p_3 z^3} + \cdots) \\ &= |p_0| + 2\Re(\overline{p_0} p_2 z^2) + (|p_2|^2 |z|^4 + 2\Re(\overline{p_0} p_4 z^4)) + \cdots \end{aligned}$$

と表わされるので $|\wp|^2 \equiv \{|p|^2 \mid p \in \wp\}$ に対し、$|\wp|^2 \cap X_{00} = \emptyset$ である。つまり Theorem 2 は Proposition 1 に依存していないものである。

実は、Theorem 2 の解は、

$$\lim_{x\to 0} u = +\infty$$

すなわち、$u(x)$ は $x = 0$ を特異点としてもつ。また、$K = K(|x|)$ であるとしても $u = u(|x|)$ とはならない。これは特異解の対称性という観点から興味深いことである ([6])。一方、条件 (3) の挙動をする方程式 (1) の古典解の族を許容するような $K(x)$ は相当制限されたものと思われる。

2 Sumarry

Propsition 1 は、次のように証明される。

- $K = |p|^2$ に対し、方程式 (1) をLiouville積分によってexplicitに解く。すなわち複素構造を活用する。
- そのことにより問題を境界上の方程式に帰着し、不動点定理によって解く。

Theorem 2 の証明にあたって、2番目のstepは活用できるが、最初の方法は $K(x) \in X_{00}$ に複素構造がないために活用できない。そこで予期される特異極限 $u_0(x) = 4 \log \frac{1}{|x|}$ に対し、$v_0(x) = e^{-u_0(x)/2}$ は D 上滑らかであるので方程式 (9)-(2) の解 u に対して

$$v(x) = e^{-u(x)/2} \tag{11}$$

をとり、

$$\{v\} = \lambda K(x) \qquad \text{in} \quad D \tag{12}$$

with

$$v = 1 \qquad \text{on} \quad \partial D \qquad (\text{ただし } \{v\} = v\Delta v - |\nabla v|^2) \tag{13}$$

の解の族 $\{(\lambda, v(x))\}$ で、

$$v(x) \to |x|^2 \quad \text{as} \qquad \lambda \downarrow 0 \tag{14}$$

なるものを構成することを考える。

$$v(x) \equiv |x|^2 + \lambda w(x) \tag{15}$$

とおけば方程式 (12)-(13) は、

$$Tw + \lambda \{w\} = K \qquad \text{in} \quad D \tag{16}$$

with

$$w = 0 \qquad \text{on} \quad \partial D \tag{17}$$

となる。ただし T は

$$\begin{aligned} Tv = d_v \{v\}|_{v=|x|^2} \;&\equiv\; \frac{d}{dt}\left\{|x|^2 + tv\right\}\Big|_{t=0} \\ &= \;|x|^4 \Delta |x|^{-2} v \end{aligned}$$

という $X \subset A(D)$ に作用できる微分作用素である。

我々は (16)-(17) の解の族 $\{(\lambda, w(x))\}$ で

$$v(x) = |x|^2 + \lambda w(x) > 0 \qquad \text{for} \quad x \neq 0 \tag{18}$$

$$\|w\|_{L^\infty} = O(1) \qquad \text{as} \quad \lambda \downarrow 0 \tag{19}$$

なるものを構成する。

後に得られる方程式 (16)-(17) の解 $w(x)$ は $0 < \lambda \ll 1$ において一様に $w(x) = O\left(|x|^2\right)$ であるので、条件 (19) より 条件 (18) が成り立つ。よって (11) と (15) におきかえた計算をたどることにより Theorem 2 の解の族 $\{(\lambda, u(x))\}$ が得られる。

$w(0) = 0$ より $\lim_{x \to 0} u(x) = +\infty$ となることに注意せよ。

方程式 (16) の線形作用素 T の可逆性について述べる。

$$\tilde{X}_{1n} = \begin{cases} |x|^2 H_{n-2} & (n \geq 2) \\ Z_1 & (n = 1) \\ \{0\} & (n = 0) \end{cases}$$

とおく。Z_nの分解

$$Z_n = \bigoplus_{\substack{2k+l=n \\ k,l \geq 0}} |x|^{2k} H_l$$

に従い、 $Z_n = \tilde{X}_{0n} \oplus \tilde{X}_{1n}$ となるように

$$\tilde{X}_{0n} \equiv \bigoplus_{\substack{2k+l=n \\ k \neq 1,\ (k,l) \neq (0,1)}} |x|^{2k} H_l$$

とする。T の性質について次のようなことがわかる。

Proposition 3

$T_n = T|_{Z_n}$ とすると T_n は次の性質をもつ。

1 $T_n : Z_n \to Z_n$
2 $ker\ T_n = \tilde{X}_{1n}$
3 $S_n = T_n^{-1}$ となる $S_n = T_n^{-1} : \tilde{X}_{0n} \to \tilde{X}_{0n}$が存在

次に、非線形部分 $\{\cdot\}$ について、次の性質が得られる。

Proposition 4

$$\left\{\bigoplus_{k\neq 0}|x|^{2k}H_l\right\}\subset\bigoplus_{k\neq 0,1}|x|^{2k}H_l \qquad \mathit{for}\quad k,l\geq 0 \tag{20}$$

これら2つのPropositionを用いて、方程式(16)を不動点方程式に帰着しよう。Proposition 3から、

$$S:\bigoplus_{n\geq 0}\tilde{X}_{0n}\to\bigoplus_{n\geq 0}\tilde{X}_{0n}$$

が $S|_{\tilde{X}_{0n}}=S_n$により定義できることと、TもSも多項式のdegreeを保存することがわかる。さらにSは、

$$\left[\bigoplus_{n\geq 0}\tilde{X}_{0n}\right]^X$$

上の有界線形作用素として拡張される。こうしてTは逆作用素Sを持つことがわかる。

一方、Proposition 4から、

$$\left\{\bigoplus_{k\neq 0,1}|x|^{2k}H_l\right\}\subset\bigoplus_{k\neq 0,1}|x|^{2k}H_l$$

より、方程式(16)に対する反復列をX_{00}の中で定義できる。更に、境界条件(17)も満たすように解を構成することを考慮しなくてはならない。そのとき $kerT_n=\tilde{X}_{0n}$を利用するため、

$$Y_0\equiv\left[\bigoplus_{l\geq 0}H_l\right]^X$$

とする。

$w_0\in X_{00}$ と $h\in Y_0$ に対し、解が $w=w_0+|x|^2h$ という形で解けるものとしよう。$Tw=Tw_0$ だから仮定、 $K\in X_{00}$ のもとで、方程式(16)に S を形式的に作用して、

$$w_0=-\lambda S\left\{w_0+|x|^2h\right\}+SK \tag{21}$$

を得る。そこで関数$h\in Y_0$を固定して、

$$F(w_0)\equiv-\lambda S\left\{w_0+|x|^2h\right\}+SK \tag{22}$$

とする。

$$X_0\equiv\left[\bigoplus_{k\neq 0}|x|^{2k}H_l\right]^X$$

$$\{v,w\} \equiv \frac{1}{2}(v\Delta w + w\Delta v) - \nabla v \cdot \nabla w$$

特に、

$$\{v\} \equiv \{v,v\} = v\Delta v - |\nabla v|^2$$

とすると、次のPropositionより $F : X_{00} \to X_{00}$である。

Proposition 5

双一次形式

$$S\{\,\cdot,\cdot\,\} : \bigoplus_{k\neq 0} |x|^{2k} H_l \times \bigoplus_{k\neq 0} |x|^{2k} H_l \to \bigoplus_{k\neq 0,1} |x|^{2k} H_l$$

は、

$$S\{\,\cdot,\cdot\,\} : X_0 \times X_0 \to X_{00}$$

なる連続一次形式に一意的に拡張される。特に$v, w \in X_0$に対し、次がいえる。

1. $S\{v\} \in X_{00}$
2. $\|S\{v,w\}\| \leq C\|v\| \cdot \|w\|$ となるような定数 $C > 0$ が存在

$h \in Y_0$ が固定されていることと、$K \in X_{00}$であることを思い出すと、

$$R \equiv \|SK\| + 1$$
$$B_R \equiv \{w_0 \in X_{00} \mid \|w_0\| \leq R\}$$

に対し、

1. 定数 $\lambda_0 = \lambda_0(\|h\|) > 0$が存在して、

$$\|F(w_0)\| \leq R \quad \text{for} \quad w_0 \in B_R \quad 0 < \lambda < \lambda_0$$

2. 定数 $C = C(\|h\|) > 0$ が存在して、

$$\|F(w_0) - F(w_0')\| \leq \lambda C \|w_0 - w_0'\| \quad \text{for} \quad w_0, w_0' \in B_R$$

となるので、$0 < \lambda < \lambda_*(\|h\|) \equiv \min\{\lambda_0, 1/c\}$ に対し、$F : X_{00} \to X_{00}$ は B_R 上の縮小写像となるので、不動点定理より

$$F(w_0) = w_0$$

なる$w_0 \in B_R$が存在する。つまり、固定された$h \in Y_0$に対し、不動点方程式(21)の解$w_0 = w_0(h) \in B_R \subset X_{00}$が定まり、$w = w_0 + |x|^2 h$は、$0 < \lambda < \lambda_* (\|h\|)$における方程式(16)を解く。

続いてこの$w = w_0 + |x|^2 h$が境界条件(17)も満たすように、$h \in Y_0$を定めよう。
Y_0の元はD上調和であるので$\Delta h = 0$ in Dであることと、$h = -w_0$ on ∂Dであることに帰着して、D上のPoisson作用素$\wp$:

$$\wp(\varphi) = h \qquad \text{for} \quad \varphi \in C(\partial D) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \Delta h = 0 & \text{in} \quad D \\ h = \varphi & \text{on} \quad \partial D \end{array}$$

を用いる。境界条件(17)を満たす$w = w_0 + |x|^2 h$を得るためには、

$$h = \lambda \wp \left(S \left\{ w_0 + |x|^2 h \right\} \right) - \wp SK \tag{23}$$

となる$h \in Y_0$をとればよい。

$$\wp |x|^{2k} h = h \qquad \text{for} \quad h \in H_l$$

であるので、$K \in X_{00}$に対し、

$$\Phi(h) \equiv \lambda \wp \left(S \left\{ w_0 + |x|^2 h \right\} \right) - \wp SK \qquad (\text{ただし、} w_0 \in X_{00} \text{ は、(21)の解}) \tag{24}$$

は、任意の閉球 : $\tilde{B}_r = \{h \in Y_0 \mid \|h\| \leq r\}$に対し、$\tilde{B}_r \to Y_0$である。この写像$\Phi$も、$\lambda > 0$を更に小さくすることにより$r = \|\wp SK\| + 1$に対する$\tilde{B}_r$上の縮小写像となり、

$$\Phi(h) = h$$

となる$h \in \tilde{B}_r \subset Y_0$が存在する。

すなわち、こうして得られた不動点方程式(23)の解$h \in \tilde{B}_r \subset Y_0$に対し、不動点方程式(21)の解$w_0 = w_0(h) \in B_R \subset X_{00}$が定まり、方程式(16)-(17)の解、$w = w_0 + |x|^2 h$が得られる。更に、

$$\|w\| \leq \|w_0\| + \left\| |x|^2 h \right\| = O(1)$$

からは、埋め込み$X \subset C(\overline{D})$を用いて条件(19)も得られ、いよいよTheorem 2の証明が完成する。

References

[1] C. Bandle, Isoperimetric Inequalities and Applications, Pitman, Boston, 1980.

[2] H. Brezis, Analyse Fonctionelle - Théorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

[3] J. Liouville, Sur l'équation aux dérivées partielles $\partial^2 \log \lambda / \partial u \partial v \pm 2\lambda a^2 = 0$, J. de Math. 18 (1853) 71-72.

[4] J. L. Moseley, Asymptotic solutions for a Dirichlet Problem with an exponential nonlinearity, SIAM J. Math, Anal. 14 (1983) 934-946.

[5] K. Nagasaki and T. Suzuki, Asymptotic analysis for two dimensional elliptic eigenvalue problems with exponentially-dominated nonlinearities, Asymptotic Analysis 3 (1990) 173-188.

[6] Y. Naito and T. Nishimoto and T. Suzuki, Radial symmetry of positive solutions for semilninear elliptic equations in a disc, Hiroshima Math. J. 26 (1996) 531-545

[7] T. Suzuki, Global analysis for a two-dimensional elliptic eigenvalue problem with the exponential nonlinearity, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Nonlinéaire 9 (1992) 367-398.

[8] T. Suzuki, Some remarks about singular perturbed solutions for Emden-Fowler equation with exponential nonlinearity, Lecture Note in Math. 1540, Springer (1993) 341-360.

[9] H. Wente, Counter example to a conjecture of H. Hopf, Pacific J. Math. 121 (1986) 193-243.

[10] V. H. Weston, On the asymptotic solution of a partial differential equation with an exponential nonlinearity, SIAM J. Math, Anal. 9 (1978) 1030-1053.